Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 4

Die positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erfüllen die Bedingung

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1\,. \tag{1}$$

Beweise, dass $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ gilt!

Lösung

Wir arbeiten mit vollständiger Induktion.

I. Induktionsanfang: $n = 1$
Wegen $n = 1$ ist $x_n = x_1$. Aus (1) wird so $x_1 = 1$. Damit wird aus der Ungleichung $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$ bloß $1 \geq 1$, was stimmt.

II. Induktionsschritt: Wir überprüfen den Übergang von n nach $n + 1$.

Voraussetzung:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n, \tag{2}$$

Folgerung:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} \geq n + 1 \tag{3}$$

Beweis: Das Produkt der Zahlen ist laut Aufgabe 1. Dies bedeutet für die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1\,. \tag{4}$$

Aus (4) und (1) folgt: $1 \cdot x_{n+1} = 1$ und somit

$$x_{n+1} = 1\,. \tag{5}$$

Gleichung (5) in (3) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 1 &\geq n + 1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n &\geq n\,. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung stimmt laut Voraussetzung. Damit ist der Beweis zu Ende.

Bemerkung

Betrachten wir nun für $n = 4$ ein Zahlenbeispiel:

$$x_1 = 8, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = \frac{1}{16}\,.$$

Die Gleichung $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$ ist erfüllt, denn $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{16} = 1$. Auch die Ungleichung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ stimmt, denn $8 + \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{16} = 12,5625 \geq 4$.

Bei dem allgemeinen Fall war eine der Zahlen gleich 1, siehe (5), aber in diesem konkreten Fall ist keine der Zahlen gleich 1.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?