Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Aufgabe 2

Untersuche das Verhalten von $\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ für $n \to \infty$!

1. Lösungsweg

$$\begin{aligned} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Antwort:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = 0\,.$$

2. Lösungsweg

Die Summe $1+2+\ldots+n$ hat n Summanden. Der kleinste ist 1, der größte ist n. Daraus folgt:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} \geq \frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n\,\mathrm{mal}}}{n^2} = \frac{n\cdot 1}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0\,,$$

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} \leq \frac{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{n\,\mathrm{mal}}}{n^2} = \frac{n\cdot n}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Die zwei Grenzwerte sind ungleich. Die Folge hat also zwei Häufungspunkte: 0 und 1. Dies bedeutet:
Antwort: Die Folge ist divergent. Sie hat keinen Grenzwert.

Die Lösungswege haben zu unterschiedlichen Ergebnissen geführt.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?