Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 6

Untersuche das Verhalten der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\frac{x+1}{x}}{\ln(\frac{1}{x})}}$ für $x \to \infty$.

1. Lösungsweg

$\frac{\frac{x+1}{x}}{\ln(\frac{1}{x})} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\ln 1 - \ln x} = -\frac{x+1}{x \ln x}$. Für $x \to \infty$ entsteht der Fall „$\frac{0}{0}$“.
Mit dem Satz von l'Hospital folgt: $\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{x+1}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\ln x} = 0$ und damit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{\ln(\frac{1}{x})} = 0\,. \tag{1}$$

$$\text{Allgemein gilt: } a^0 = 1, \text{ für jedes } a. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:
Antwort: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

2. Lösungsweg

Allgemein gilt: $a = e^{\ln a}$ für jedes a. Damit ist

$$f(x) = e^{\ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{\frac{x+1}{x}}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}\right]} = e^{\frac{\frac{x+1}{x}}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{x+1}{x}} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x} = 1+0 = 1 \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt:

Antwort: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?

Anm.: Mitverfasser dieser Aufgabe ist Matthias Benkeser aus Ottersweier.