Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 10

Die Funktion f sei differenzierbar und es sei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Untersuche den Grenzwert von $f'(x)$ für $x \to \infty$.

Lösung

1. Schritt Wir untersuchen zwei Beispiele.
Beispiel 1: $f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$.
Beispiel 2: $f(x) = e^{-2x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und $f'(x) = -2e^{-2x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$.
2. Schritt Wir stellen eine Vermutung auf: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
3. Schritt Wir beweisen nun diese Vermutung. Dazu verwenden wir den Mittelwertsatz.
Dieser Satz besagt: Ist f in $[x_1, x_2]$ differenzierbar, dann gibt es zwischen x_1 und x_2 eine Stelle z, für welche $f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$ gilt.
Wir wenden den Mittelwertsatz für f im Intervall $[x, x+1]$ an:

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= f'(z)(x+1-x) \\ f(x+1) - f(x) &= f'(z)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus $x < z < x + 1$ folgt:

$$\text{Wenn } x \to \infty\text{, dann auch } z \to \infty \text{ und umgekehrt.} \tag{2}$$

Laut Angabe ist $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+1) - f(x)] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x+1) - \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$, d. h.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x+1) - f(x)] = 0\,. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\lim_{x\to\infty} f'(z) = 0\,. \tag{4}$$

Mit (4) und (2) ist unsere Vermutung bewiesen.
Antwort: $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Bemerkung

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel.
Beispiel 3: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$.
$f(x) = \frac{\cos(x^2)\cdot 2x\cdot x - \sin(x^2)\cdot 1}{x^2} = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$.
Betrachten wir nun aber die Folge $x_n = \sqrt{2n\pi}$. Wegen $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und unter der Annahme $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ gilt

$$f'(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0\,. \tag{5}$$

Andererseits ist $f'(x_n) = 2\cos(2n\pi) - \frac{\sin(2n\pi)}{2n\pi} = 2 \cdot 1 - 0 = 2$ für jedes n, eine konstante Folge also. Daraus folgt

$$f'(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 2. \tag{6}$$

(5) und (6) stellen einen Widerspruch dar.
Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?