Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 6

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \notin \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\} \\ n, & \text{für } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$

Untersuche die Riemann-Integrierbarkeit von f und berechne gegebenenfalls das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

1. Lösungsweg

Aus ihrer Definition folgt, dass f genau an den Stellen der Form $x = \frac{1}{n}$ mit $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$ nicht stetig ist. Wir prüfen diese ziemlich offensichtliche Eigenschaft an zwei Beispielen.

<u>Beispiel 1:</u> $x_0 = \frac{1}{3}$. $f(x_0) = f(\frac{1}{3}) = 3$ und $f(x) = x^2 \xrightarrow[x \neq \frac{1}{3}]{x \to \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Wegen $3 \neq \frac{1}{9}$ ist f an der Stelle $x_0 = \frac{1}{3}$ nicht stetig.

<u>Beispiel 2:</u> $x_0 = \frac{2}{3}$. $f(x_0) = f(\frac{2}{3}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ und $f(x) = x^2 \xrightarrow[x \neq \frac{2}{3}]{x \to \frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Es ist also $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = f(\frac{2}{3})$. Dies bedeutet, dass f an der Stelle $x_0 = \frac{2}{3}$ stetig ist.

1. Schritt: Es sei $0 < \epsilon < 1$. Wir berechnen $\displaystyle\int_\epsilon^1 f(x)\,dx$.

Bemerkung: f ist im Intervall $[\epsilon, 1]$ bis auf endlich viele Stellen stetig.

Es gilt z. B. für $\epsilon = 0{,}08$, dass $\frac{1}{n} \geq \epsilon$ wenn $n \leq \frac{1}{\epsilon} = 12{,}5$. In diesem Beispiel ist f genau an $\lfloor 12{,}5 \rfloor - 1 = 11$ Stellen des Intervalls $[0{,}08; 1]$ nicht stetig, nämlich an den Stellen $\frac{1}{n}$ für $n \in \{2, \ldots, 12\}$.

Allgemein gilt: $\frac{1}{n} \geq \epsilon$ wenn $n \leq \frac{1}{\epsilon}$ und somit ist f an genau $\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor - 1$ Stellen des Intervalls $[\epsilon, 1]$ nicht stetig.

Jede stetige Funktion ist integrierbar. Nun wenden wir folgenden Satz an:

Satz: Wenn zwei Funktionen f und g bis auf endlich viele Stellen gleich sind und f stetig ist, dann ist g auch integrierbar und die zwei Integrale sind gleich.

Betrachten wir folgende stetige Hilfsfunktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$. Im Intervall $[\epsilon, 1]$ gilt: $f(x) = g(x)$ bis auf die angesprochenen $\left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor - 1$ endlich vielen Stellen. Wegen des Satzes ist f integrierbar in diesem Intervall und

$$\int_\epsilon^1 f(x)\,dx = \int_\epsilon^1 g(x)\,dx = \int_\epsilon^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{3} - \frac{\epsilon^3}{3}\,.$$

2. Schritt: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 f(x)\,dx$. Wir untersuchen den Grenzwert.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{\epsilon^3}{3}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\,.$$

Antwort: f ist integrierbar und $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

2. Lösungsweg

Wir arbeiten mit Riemann-Summen der Form

$$\sigma(\Delta_n, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)\,.$$

Es sei $\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Damit ist $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und es ist $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$ für jedes i. Es seien noch $\xi_1 = \frac{1}{n^2}$ und $\xi_i = \frac{i}{n}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Eingesetzt in die Riemann-Summe erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta_n, \xi_i) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= n^2 \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} > n + 0}_{\text{wegen } f(x)>0} = n\,.\end{aligned}$$

Zusammengefasst: $\sigma(\Delta_n, \xi_i) > n \xrightarrow{n\to\infty} \infty\,.$

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\Delta_n, \xi_i) = \infty\,.$ (1)

Laut Definition ist $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(\Delta_n, \xi_i)\,.$ (2)

Aus (1) und (2) folgt:

Antwort: Die Funktion f ist nicht integrierbar.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?