Schlaue Leute werden durch die Fehler von anderen klug

Weitere Informationen zu den Aufgaben und zum Wettbewerb finden sich unter http://www.wurzel.org/werkstatt.

Aufgabe 5

Löse die Gleichung $\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1$ mit $x \in [0°, 180°)$.

1. Lösungsweg

Durch $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x \\
-\sin x \cos x + \cos^2 x &= 0 \\
\cos x(\cos x - \sin x) &= 0 \\
\text{1. Fall:} \qquad \cos x &= 0 \iff x = 90° \\
\text{2. Fall:} \quad \cos x - \sin x &= 0 \iff \sin x = \cos x \qquad | : \cos x \\
&\iff \tan x = 1 \iff x = 45°\,.
\end{aligned}$$

Antwort: $x_1 = 45°$ und $x_2 = 90°$.

2. Lösungsweg

Wir führen alle Terme auf $\tan x$ zurück. Mit der Bezeichnung $t = \tan x$ erhalten wir:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \tag{1}$$

$$\text{z. B. } \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin^2 x.$$

Die anderen zwei Formeln können ähnlich bewiesen werden. Nun setzen wir die Formeln aus (1) in die Ausgangsgleichung ein.

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} + \frac{2}{1+t^2} = 1 &\iff t^2 - t + 2 = 1 + t^2 \\ &\iff t = 1 \iff \tan x = 1 \iff x = 45^\circ \end{aligned}$$

Antwort: $x = 45^\circ$.

Die zwei Lösungswege haben zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen geführt.

Widerspruch! – Was ist richtig? Was ist falsch? Warum?